33期生 理系数学 STAY HOME, STUDY HARD 演習 解説①

$\boxed{1}$ [2004 大阪商業大]

$4\sin 30^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$\boxed{2}$ [1997 倉敷芸術科学大]

$$(\tan 30^\circ+\tan 60^\circ)^2-(\tan 30^\circ+\tan 120^\circ)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}=4$$

$\boxed{3}$ [2009 中央大]

θ は鋭角であるから　$\cos\theta>0$

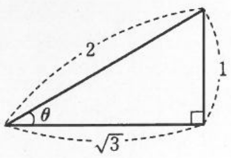
よって　$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{4}$ [2006 東海大]

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ において，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は

$\theta=30^\circ$



$\boxed{5}$ [2003 北海道工業大]

$\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}$ から　$\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$

よって　$\sin\theta=\frac{1}{2}$

θ は鈍角であるから　$\theta=150^\circ$

このとき　$\cos\theta=\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{6}$ [2008 金沢工業大]

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ であるから　$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}=\frac{9}{16}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$，$\tan\theta>0$ であるから　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\frac{3}{4}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\boxed{7}$ [2005 近畿大]

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より　$1+\left(-\frac{12}{5}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$　すなわち　$\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{169}{25}$

よって　$\cos^2\theta=\frac{25}{169}$

$\tan\theta<0$ より θ は鈍角であるから　$\cos\theta<0$

したがって　$\cos\theta=-\frac{5}{13}$

よって　$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=-\frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{12}{13}$

$\boxed{8}$ [2003 同志社女子大]

$2\cos^2\theta+\cos\theta=0$ から　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

よって　$\cos\theta=0,\ -\frac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=90^\circ,\ 120^\circ$

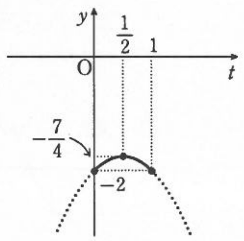
$\boxed{9}$ [2005 久留米大]

$\sin x=t$ とおくと，$0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$ から　$0\leqq t\leqq 1$

また，$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ であるから

$$y=(1-t^2)+t-3=-t^2+t-2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$$

$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で y は $t=\frac{1}{2}$ すなわち $x=30^\circ,\ 150^\circ$ のとき最大値 $-\frac{7}{4}$ をとり，$t=0,\ 1$ すなわち $x=0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ$ のとき最小値 -2 をとる。



$\boxed{10}$ [2004 大阪電気通信大]

$30^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$-1\leqq\cos\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ であるから

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ すなわち $\theta=120^\circ$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$，

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta=30^\circ$ のとき最大値 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ をとる．

$\boxed{11}$ [2006 京都薬科大]

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$$

(3)　$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$
$$=1^2-2\left(-\frac{3}{8}\right)^2=\frac{23}{32}$$

(4)　$\sin^5\theta+\cos^5\theta=(\sin^3\theta+\cos^3\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)$
$$=\frac{11}{16}\cdot 1-\left(-\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{79}{128}$$

$\boxed{12}$ [2004 埼玉工業大]

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を平方して　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$

すなわち　$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

よって　$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

また　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$$

$\boxed{13}$ [2006 北海学園大]

$\triangle$ABC について余弦定理を用いると

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$$
$$=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cos 60^\circ$$
$$=25+64-40=49$$

$BC>0$ であるから　$BC=7$

また，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$$

$\boxed{14}$ [2004 福井工業大]

(1)　余弦定理により

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$

$a>0$ であるから　$a=2$

(2)　$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$B=30^\circ$

また　$C=180^\circ-A-B=180^\circ-45^\circ-30^\circ=105^\circ$

$\boxed{15}$ [1999 千葉工業大]

$\angle B=105^\circ$，$\angle C=45^\circ$ から　$\angle A=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

よって，正弦定理により　$\frac{AB}{\sin 45^\circ}=\frac{7}{\sin 30^\circ}$

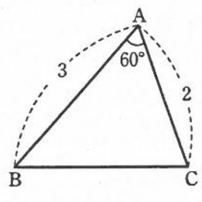
ゆえに　$AB=7\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=7\sqrt{2}$

$\boxed{16}$ [2003 玉川大]

余弦定理から　$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$
$$=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ=7$$

ゆえに　$BC=\sqrt{7}$

また　$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{7}}$
$$=\frac{2}{\sqrt{7}}$$



$\boxed{17}$ [2004 大阪商業大]

求める面積 S は　$S=2\sqrt{3}\cdot 3\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9$